Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 18** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 18/05, 16h30

Aula 18
1/2

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

## Slides 14 a 16 — Procedimento para o cálculo de extremos globais

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua e D fechado e limitado.

Para se determinarem os extremos globais de $f$ em D, pode-se usar este procedimento:

1.º Passo: Calcular os pontos críticos de $f$ e só considerar os que pertencem ao interior de D.

2.º Passo: Determinar, no interior de D, os pontos onde não exista pelo menos uma das derivadas parciais de $f$.

3.º Passo: Determinar os candidatos a extremantes de cada restrição de $f$ à fronteira de D.

4.º Passo: Calcular o valor de $f$ em todos os pontos encontrados nos passos anteriores. O menor dos valores é o mínimo global de $f$ em D e o maior dos valores é o máximo global de $f$ em D.

**Notas sobre o 3.º passo**

1) Em cada restrição podemos optar por 2 métodos:
   1.ª opção: calcular diretamente reduzindo o n.º de variáveis de $f$
   2.ª opção: usar o método dos multiplicadores de Lagrange

2) Quando a fronteira for uma circunferência ou uma elipse, pode ser útil usar as seguintes parametrizações:

- circunferência $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \rightsquigarrow \begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r \operatorname{sen}\theta \end{cases}, \ \theta \in [0, 2\pi]$

- elipse $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \rightsquigarrow \begin{cases} x = x_0 + a\cos\theta \\ y = y_0 + b \operatorname{sen}\theta \end{cases}, \ \theta \in [0, 2\pi]$

Ver exercício resolvido dos slides 15 e 16

Exercício 1: Determinar os extremos globais da função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ no triângulo cujos vértices são os pontos $(0,0)$ ; $(0,2)$ ; $(3,2)$.

Exercício 2: Seja $f$ a função definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$ por $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$.
Determine os extremos globais da função $f$ em $D$.

TPCs: Folha prática 3: 26, 30, 31, 37

Ex. Recurso, 08/07/2019 → Ex. 4

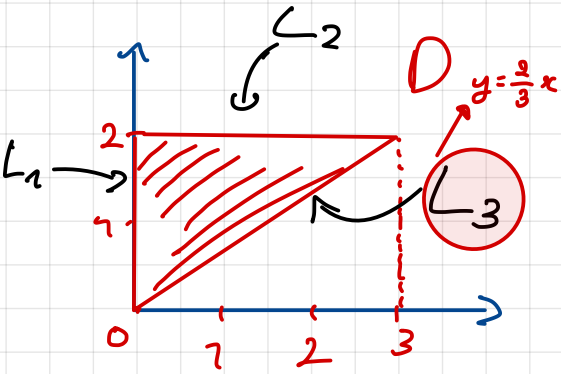
2.º Teste, 13/06/2018 → Ex. 2

1.º Teste, 05/04/2017 → Ex. 2 ; 3

# Aula 18

7) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$

$\boxed{\text{Vértices do triângulo: } (0,0), (0,2), (3,2)} \to D$




## 1º Passo: Pontos críticos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \to \text{Ponto crítico: } (1,1)$$

Verificar se $(1,1) \in \text{int}(D)$ ✓

**2º Passo:** A função tem derivadas parciais em $\mathbb{R}^2 \to$ saltar este passo

**3º Passo:** Neste exercício, a região $D$ tem uma fronteira constituída por 3 lados

→ **Lado $L_1$:** $x = 0, \; 0 \leq y \leq 2$

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y \xrightarrow{x=0} h(y) = f(0,y) = 2y \quad \text{com } D_h = [0,2]$$

Nota: Os pontos críticos de $h$ são → os extremos de $D_h$ / → os zeros de $h'$ } Válido para todas as restrições

$h'(y) = (2y)' = 2 \neq 0$ (a derivada não tem zeros

Pontos críticos de $h$: $y = 0$ e $y = 2$ → Pontos críticos de $f$ em $\underbrace{L_1}_{x=0}$: $(0,0)$ e $(0,2)$

→ **Lado $L_2$:** $0 \leq x \leq 3, \; y = 2$

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y \xrightarrow{y=2} h(x) = f(x,2) = x^2 - 4x + 4, \quad D_h = [0,3]$$

$h'(x) = (x^2 - 4x + 4)' = 2x - 4 \to h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Pontos críticos de $h$: $x = 0, x = 2, x = 3$ → Pontos críticos de $f$ em $\underbrace{L_2}_{y=2}$: $(0,2), (2,2), (3,2)$

→ Lado $L_3$: $0 \le x \le 3$, $y = \frac{2}{3}x$

$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y \underset{y=\frac{2}{3}x}{\rightsquigarrow} h(x) = f(x; \tfrac{2}{3}x) = x^2 - 2x \times \tfrac{2}{3}x + 2 \times \tfrac{2}{3}x = \dots = -\frac{x^2}{3} + \frac{4}{3}x$ $\quad D_h = [0,3]$

$h'(x) = \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{4}{3}x\right)' = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \rightsquigarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 2$

Pontos críticos de h: $x=0$, $x=2$, $x=3$ → Pontos críticos de $f$ $\underbrace{\text{em } L_3}$ : $(0, \frac{2}{3}\times 0) = (0,0)$

↳ $y = \frac{2}{3}x$ $\quad (2, \frac{2}{3}\times 2) = (2, \frac{4}{3})$

$(3, \frac{2}{3}\times 3) = (3,2)$

4º Passo:

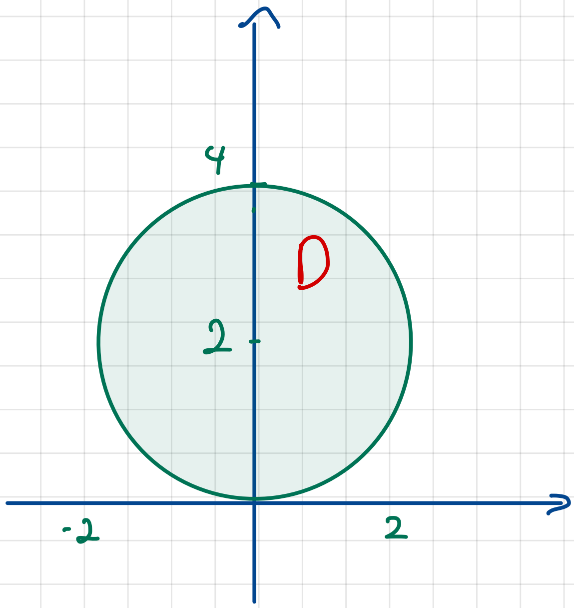
| Pontos Críticos | (1,1) | (0,0) | (0,2) | (2,2) | (3,2) | $(2,\frac{4}{3})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| valor de f | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | $\frac{4}{3}$ |

Conclusão: Mínimo global: 0 ⇝ Minimizantes globais (0,0) e (2,2)

Máximo global: 4 ⇝ Maximizante global: (0,2)

2) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \le 4\}$




1º Passo: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ ; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$ $\quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2(y-1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \rightsquigarrow (0,1) \in \text{int}(D)$ ✓

Ponto crítico: (0,1)

2º Passo: $f$ tem derivadas parcais em $\mathbb{R}^2$ ⇝ não há pontos neste passo

3º Passo: Vamos resolver este passo de 3 métodos diferentes

1º Método: Método dos Multiplicadores de Lagrange ⇝ Aula 17

$f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

C. aux. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ ; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$ ; $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ ; $\frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-2)$

Fronteira: $\underbrace{x^2 + (y-2)^2}_{g(x,y)} = \underbrace{4}_{K}$

$$\begin{cases} \cancel{2}x = \lambda \cancel{2}x \\ \cancel{2}(y-1) = \lambda \cancel{2}(y-2) \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda)=0 \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \_\_\_\_ \\ (y-2)^2=4 \end{cases} \cup \underbrace{\begin{cases} \lambda=1 \\ \cancel{y}-1=\cancel{y}-2 \\ \_\_\_\_ \end{cases}}_{\text{impossível}} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \_\_\_\_ \\ y-2=\pm\sqrt{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \_\_\_\_ \\ y-2=2 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ \_\_\_\_ \\ y-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4-1=\lambda(4-2) \\ y=4 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ 0-1=\lambda(0-2) \Leftrightarrow \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ \lambda=\frac{3}{2} \\ y=4 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ \lambda=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

Pontos críticos de $f$ na fronteira: $(0,4)$; $(0,0)$

4º Passo: $f(0,1) = 0^2 + (1-1)^2 = 0 \rightarrow$ Mínimo global

$f(0,4) = 0^2 + (4-1)^2 = 9 \rightarrow$ Máximo global

$f(0,0) = 0^2 + (0-1)^2 = 1$

— // —

2º Método para o 3º Passo → transformar $f$ numa função de 1 variável

(nem sempre se consegue)

$$f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 \longrightarrow h(y) = 4-(y-2)^2 + (y-1)^2 = \cancel{4} - (\cancel{y^2} - 4y + \cancel{4}) + \cancel{y^2} - 2y + 1$$

$$= 2y+1$$

Fronteira: $x^2 - (y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4-(y-2)^2$, $\underbrace{y \in [0,4]}$

↳ Ver gráfico de D

Então: $h(y) = 2y+1$, $y \in [0,4]$

$h'(y) = (2y+1)' = 2 \neq 0 \rightarrow$ a derivada de $h$ não tem zeros

Pontos críticos de $h$: $y=0$ e $y=4$

Pontos críticos de $f$ na fronteira:

C. aux. $x^2 = 4-(y-2)^2$

- $y=0 \rightarrow x^2 = 4-(0-2)^2 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$
- $y=4 \rightarrow x^2 = 4-(4-2)^2 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0 \rightarrow (0,4)$

3º Método para o 3º passo $\rightsquigarrow$ parametrizar a circunferência

$f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

Fronteira: $x^2 + (y-2)^2 = 4$ $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2 + 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$x_0 = 0$; $y_0 = 2$; $r = \sqrt{4} = 2$

$f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ $\rightsquigarrow$ $h(\theta) = (2\cos\theta)^2 + (2 + 2\,\text{sen}\,\theta - 1)^2 = 4\cos^2\theta + (1 + 2\,\text{sen}\,\theta)^2$

$= 4\cos^2\theta + 1 + 4\,\text{sen}\,\theta + 4\,\text{sen}^2\theta$

$= 4(\underbrace{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}_{=1}) + 1 + 4\,\text{sen}\,\theta = 5 + 4\,\text{sen}\,\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$h'(\theta) = (5 + 4\,\text{sen}\,\theta)' = 4\cos\theta$

$h'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 4\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \overset{\text{em } [0,2\pi]}{\Leftrightarrow} \theta = \frac{\pi}{2} \cup \theta = \frac{3\pi}{2}$

Pontos críticos de $h$: $\theta = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\theta = \frac{3\pi}{2}$; $\theta = 2\pi$

Pontos críticos de $f$ na fronteira:

$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2 + 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$\theta = 0 \rightsquigarrow (2\cos 0,\ 2 + 2\,\text{sen}\,0) = (2,2)$

$\theta = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow (0,4)$

$\theta = \frac{3\pi}{2} \rightsquigarrow (0,0)$

$\theta = 2\pi \rightsquigarrow (2,2)$

Nota: Por este método temos um ponto crítico extra: $(2,2)$
Mas como $f(2,2) = 2^2 + (2-1)^2 = 5$, ele não vai influenciar o 4º passo pois como vimos, o mínimo global é 0 e o máximo global é 9.